

Identificación de un servomecanismo controlado en velocidad usando mediciones de su posición

Rubén Garrido y Antonio Concha

Departamento de Control Automático, CINVESTAV IPN

Gustavo A. Madero D.F 07360, México

E-mail: garrido, aconcha@ctrl.cinvestav.mx

Teléfono: (52)-55- 57473739

Resumen—Este artículo presenta un método que estima los parámetros de un servomecanismo de Corriente Directa controlado en velocidad utilizando sólo mediciones de su posición. Un controlador Proporcional Integral estabiliza al servomecanismo sin el conocimiento de sus parámetros, y utiliza un estimado de la velocidad obtenido al filtrar la posición del motor. La técnica propuesta consiste de dos pasos, en el primero se utiliza el método de Mínimos Cuadrados fuera de línea para estimar una perturbación constante y los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb; en el segundo paso estos estimados permiten calcular la inercia del servo. La técnica de identificación propuesta utiliza conceptos básicos de un curso introductorio de sistemas de control tales como: transformada de Laplace, ecuación característica, criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz y el teorema del valor final. Resultados experimentales obtenidos con un prototipo de laboratorio permiten evaluar el desempeño del método de identificación propuesto.

Palabras clave: Estimación paramétrica, Mínimos Cuadrados, servomecanismo, control de velocidad.

I. INTRODUCCIÓN

Los servomecanismos de Corriente Directa (CD) son empleados en una gran variedad de aplicaciones que requieren control de posición o de velocidad. Ejemplos de su aplicación incluyen: maquinas herramienta, robots, impresoras, discos duros, etc. La estimación del modelo de servomecanismos de CD ha sido de interés en los años recientes. Las referencias (Kelly, 2000; Basilio, 2002; Basilio y Moreira, 2004) presentan técnicas de identificación de motores de CD que operan en lazo abierto y cuya variable medible es la velocidad. La referencia (Kelly, 2000) estima la fricción viscosa y la de Coulomb aplicando al motor un par creciente con forma de rampa. En (Basilio, 2002) se suministra un par constante para estimar la constante de tiempo mecánica del motor. En (Basilio y Moreira, 2004) una metodología de identificación en el espacio de estados utiliza el método de Mínimos Cuadrados fuera de línea (Strang, 1988) para calcular la inercia y el coeficiente de fricción viscosa del motor. Por otro lado, las referencias (Awaya et al., 1992; Lee et al., 2004; Yang y Deng, 2005; Kobayashi et al., 1995; Kwon et al., 2006) presentan métodos de identificación de servomecanismos que operan en lazo cerrado y que son controlados en velocidad. Las referencias (Awaya et

al., 1992; Lee et al., 2004; Yang y Deng, 2005) estiman la inercia del servo utilizando variables estimadas por un observador lineal tales como velocidad del motor y par de perturbación. La referencia (Kobayashi et al., 1995) emplea un observador de par para estimar la inercia y la fricción viscosa, los cuales posteriormente son utilizados para calcular la fricción de Coulomb. La referencia (Kwon et al., 2006) identifica la inercia y la fricción viscosa de un servo usando una velocidad de referencia cuya derivada en el tiempo es diferente de cero. Por otro lado, la referencia (Andoh, 2007) estima la inercia, las fricciones viscosa y de Coulomb y un par de perturbación de un servomecanismo controlado en posición y estabilizado por una ley de control proporcional derivativa; el autor emplea una posición de referencia periódica para estimar el momento de inercia, y utiliza el método de Mínimos Cuadrados y diferentes velocidades de referencia constantes para estimar los otros tres parámetros. Esta última referencia aplica diferenciación numérica a la posición del servo para obtener un estimado de la velocidad del motor.

Este artículo propone un método simple de identificación en lazo cerrado que estima los parámetros de un servomecanismo controlado en velocidad, los cuales son: Su inercia, su fricción viscosa y de Coulomb y una perturbación constante. Una ley de control Proporcional Integral (PI) estabiliza el lazo de realimentación sin el conocimiento de los parámetros del servomecanismo. El control de velocidad se lleva a cabo utilizando sólo mediciones de la posición del servo, y está basado en la idea propuesta en (Moreno y Kelly, 2002) que consiste en reemplazar la velocidad del motor por un filtrado de su posición y de la velocidad de referencia; este filtrado se realiza mediante un filtro estable de primer orden con grado relativo cero. De esta manera se evita el uso de mediciones de velocidad proporcionadas por tacómetros, las cuales a menudo están contaminadas con ruido; además, no es necesario el diseño de un observador de estado que estime la velocidad del servo. El procedimiento de filtrado también evita la estimación de la velocidad del servo obtenida por medio de la diferenciación numérica de la posición, la cual es medida por un decodificador óptico. Es sabido que esta aproximación no funciona bien, especialmente cuando se reduce el periodo de muestreo

(Jaritz y Spong, 1996). El método de identificación propuesto consiste de dos pasos. En el primer paso se utilizan diferentes velocidades de referencia constantes para estimar los coeficientes de fricción del servo y una perturbación constante; el Método de Mínimos Cuadrados fuera de línea se utiliza para calcular estos parámetros. En el segundo paso se requiere una velocidad de referencia con forma de rampa, y se emplea su pendiente así como los parámetros estimados en el primer paso para el cálculo del momento de inercia.

El artículo está organizado como sigue. La sección II muestra el modelo de un servomecanismo. La sección III describe el control de velocidad del servomecanismo utilizando sólo mediciones de su posición. La sección IV presenta el método de identificación propuesto. En la sección V se explica un método para validar el modelo identificado. La sección VI muestra los resultados experimentales. Finalmente, en la sección VII se establecen las conclusiones de este trabajo.

II. MODELO DE UN SERVOMECANISMO

La Fig. 1 muestra el diagrama de bloques del servomecanismo, el cual consiste de un servomotor de CD que impulsa a un disco de latón, de un amplificador de potencia y de un codificador óptico que mide la posición del motor.

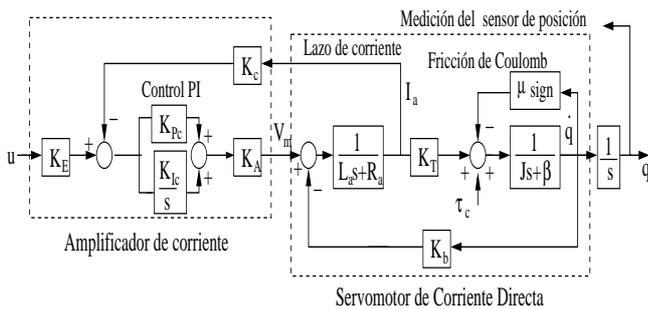


Figura 1. Servomecanismo de CD.

El amplificador está configurado en modo corriente. Esta característica equivale a cerrar un lazo de realimentación mediante una ley de control PI utilizando la corriente de armadura I_a . La variable u es el voltaje de control, K_E es la ganancia de entrada del amplificador, K_{Pc} y K_{Ic} son respectivamente las ganancias proporcional e integral del controlador PI del lazo de corriente, K_c es la ganancia de dicho lazo, K_A es la ganancia del puente H del amplificador. Las variables V_m , R_a , L_a , K_T , K_b , J y β son respectivamente el voltaje de entrada del motor, la resistencia de armadura, la inductancia de armadura, la constante de par, la constante de fuerza contraelectromotriz, la inercia y la fricción viscosa. J es la suma de la inercia del servomotor J_m , la inercia del disco de latón J_d y la inercia del codificador óptico J_e . El parámetro μ representa el coeficiente de fricción de Coulomb y el parámetro τ_c corresponde a perturbaciones constantes o a voltajes constantes parásitos

producidos dentro del amplificador. Las variables q y \dot{q} son respectivamente la posición en revoluciones (rev) y la velocidad angular del servo en rev/s.

La función del lazo de corriente en la Fig. 1 es mantener la corriente de armadura I_a proporcional al voltaje de control u . Debido a que la ganancia integral K_I del amplificador tiene un valor elevado, la constante de tiempo eléctrica del servomecanismo es más pequeña que la constante de tiempo mecánica. Por lo tanto, el transitorio debido a la dinámica eléctrica se puede ignorar. Esta simplificación permite obtener el siguiente modelo del servomecanismo:

$$J\ddot{q} + \beta\dot{q} + \mu\text{sign}(\dot{q}) = \tau + \tau_c \quad (1)$$

donde $\tau = Ku$ es el par aplicado al servo y $K = \frac{K_E K_T}{K_c}$. Esta ganancia K se supone conocida.

Defínanse las relaciones

$$a = \frac{\beta}{J}, \quad b = \frac{1}{J}, \quad c = \frac{\mu}{J}, \quad d = \frac{\tau_c}{J} \quad (2)$$

Entonces, la expresión (1) se puede reescribir como:

$$\ddot{q} + a\dot{q} + c\text{sign}(\dot{q}) = b\tau + d \quad (3)$$

III. CONTROL DE VELOCIDAD USANDO MEDICIONES DE POSICIÓN

Considérese el sistema en lazo cerrado mostrado en la Fig. 2, donde la velocidad del servo \dot{q} se controla usando mediciones de posición q . El objetivo de control es que \dot{q} sea igual a la velocidad deseada \dot{q}_d , la cual se supone diferenciable. La variable ϑ es un estimado de \dot{q} y se obtiene al filtrar q y \dot{q}_d mediante el filtro $s/(s + \alpha)$, donde α es una constante positiva (Moreno y Kelly, 2002). Se propone el siguiente controlador PI, el cual puede estabilizar el lazo sin el conocimiento de los parámetros del servomecanismo

$$\tau = K_P \dot{\xi} + K_I \xi \quad (4)$$

donde K_P y $K_I > 0$ son respectivamente las ganancias proporcional y derivativa del controlador. La señal ξ se considera un estimado del error de velocidad $\dot{\tilde{q}}$ definido como:

$$\dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (5)$$

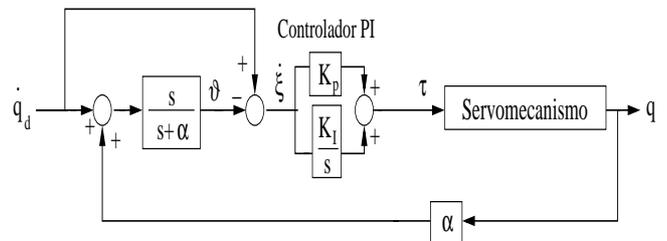


Figura 2. Control de velocidad usando mediciones de posición.

III-A. Análisis de estabilidad del sistema de control

La siguiente expresión en el dominio de la frecuencia se obtiene del sistema en lazo cerrado mostrado en la Fig. 2:

$$\mathcal{L}[\vartheta] = \frac{s}{s + \alpha} \mathcal{L}[\alpha q + \dot{q}_d] \quad (6)$$

donde \mathcal{L} es el operador de la transformada de Laplace.

La ecuación (6) en el dominio del tiempo está dada por

$$\dot{\vartheta} = -\alpha\vartheta + \alpha\dot{q} + \ddot{q}_d \quad (7)$$

De la Fig. 2 también se tiene la siguiente expresión

$$\dot{\xi} = \dot{q}_d - \vartheta \quad (8)$$

Tomando la derivada en el tiempo de (8) resulta en

$$\ddot{\xi} = \ddot{q}_d - \dot{\vartheta} \quad (9)$$

Sustituyendo (7) en (9) produce

$$\ddot{\xi} = \alpha[\vartheta - \dot{q}] \quad (10)$$

Si la variable ϑ en (8) se reemplaza en (10) se obtiene

$$\ddot{\xi} = -\alpha[\dot{\xi} - \dot{q}_d + \dot{q}] \quad (11)$$

Usando (5), la ecuación (11) puede ser reescrita como:

$$\ddot{\xi} = -\alpha[\dot{\xi} - \dot{q}] \quad (12)$$

Por otro lado, sustituyendo la ley de control (4) en el modelo del servomecanismo (3) resulta en

$$\ddot{q} + a\dot{q} + c\text{sign}(\dot{q}) = bK_P\dot{\xi} + bK_I\xi + d \quad (13)$$

Sumando y restando los términos \ddot{q}_d y $a\dot{q}_d$ a la ecuación anterior y usando (5) produce

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d + a\dot{q}_d - a\dot{q} - bK_P\dot{\xi} - bK_I\xi + c\text{sign}(\dot{q}) - d \quad (14)$$

Las ecuaciones (12) y (14) forman la siguiente expresión en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\xi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ -bK_I & -bK_P & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (15)$$

$$v = \ddot{q}_d + a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d$$

La ecuación (15) tiene la forma

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (16)$$

El sistema en lazo cerrado (16) es estable si una señal acotada v produce un estado acotado x . La variable v en (15) es acotada si \ddot{q}_d y \dot{q}_d son acotados, además $c\text{sign}(\dot{q})$ y d son acotados. La estabilidad de (16) está directamente relacionada con la localización de las raíces de la ecuación característica de la matriz A ; esta ecuación es definida como $\det(sI - A) = 0$. Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (16) sea estable es que las raíces de $\det(sI - A)$ tengan parte real negativa (Kuo, 1982; Dorf y

Bishop, 1998). La ecuación característica de A está dada por:

$$p(s) = s^3 + (a + \alpha)s^2 + (\alpha a + \alpha bK_P)s + \alpha bK_I = 0 \quad (17)$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz (Kuo, 1982; Dorf y Bishop, 1998) a (17) se obtienen las siguientes condiciones que garantizan que las raíces de este polinomio tienen parte real negativa

$$(a + \alpha) > 0, \quad \alpha bK_I > 0 \quad (18)$$

$$(a + \alpha)(a + bK_P) > bK_I \quad (19)$$

Las dos desigualdades en (18) se satisfacen porque todos los parámetros que aparecen en ellas son positivos. La desigualdad (19) se cumple si

$$K_P > \frac{K_I}{\alpha} \quad (20)$$

Notar que esta condición no depende de los parámetros del servo.

Para implementar el filtro (6) en una computadora es necesario representar tal sistema como una ecuación diferencial. La siguiente expresión es equivalente a (6)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\vartheta \\ \vartheta &= x + aq + \dot{q}_d \end{aligned} \quad (21)$$

Por lo tanto, la señal $\dot{\xi}$ en el controlador (4) puede ser obtenida usando (8) y (21) sin emplear mediciones de la velocidad \dot{q} .

IV. ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN PROPUESTO

Supóngase que:

- **(S1)** El sistema (16) es estable, es decir, las ganancias del controlador τ en (4) satisfacen (20).
- **(S2)** Aplicando una referencia \dot{q}_d que no cambia de signo provoca que el servomecanismo gire en una sola dirección.

IV-A. Primer paso de la identificación: estimación de β , μ y τ_c

Si \dot{q}_d es constante entonces v en (15) está dada por

$$v = a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d \quad (22)$$

donde el término $c\text{sign}(\dot{q})$ en (22) es constante por la suposición **(S2)**.

La transformada de Laplace de v es la siguiente

$$V(s) = \frac{a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d}{s} \quad (23)$$

La transformada de Laplace $X(s)$ de x in (16) es

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BV(s) \quad (24)$$

donde $X(s) = [\mathcal{L}[\xi], \mathcal{L}[\dot{\xi}], \mathcal{L}[\dot{q}]]^T$.

De acuerdo al teorema del valor final (Kuo, 1982; Dorf y Bishop, 1998), el estado estacionario $x_* = [\xi_*, \dot{\xi}_*, \dot{q}_*]^T$ de x se obtiene mediante

$$x_* = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (25)$$

La respuesta en x debido a las condiciones iniciales $x(0)$ converge exponencialmente a cero, entonces

$$x_* = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI - A)^{-1}BV(s) \quad (26)$$

El término $(sI - A)^{-1}B$ está dado por

$$(sI - A)^{-1}B = \left[\frac{\alpha}{p(s)}, \frac{\alpha s}{p(s)}, \frac{(s + \alpha)s}{p(s)} \right]^T \quad (27)$$

donde $p(s) = \det(sI - A)$.

Sustituyendo (23) y (27) en (26) resulta en

$$[\xi_*, \dot{\xi}_*, \dot{q}_*]^T = \left[\frac{a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}) - d}{bK_I}, 0, 0 \right]^T \quad (28)$$

Como \dot{q} converge a $\dot{q}_* = 0$, \dot{q} converge a \dot{q}_d . Por lo tanto, en estado estacionario se tiene de (28) lo siguiente:

$$a\dot{q}_d + c\text{sign}(\dot{q}_d) - d = bK_I\xi_* \quad (29)$$

Sustituyendo a , b , c y d de (2) en la ecuación (29) se obtiene

$$\beta\dot{q}_d + \mu\text{sign}(\dot{q}_d) - \tau_c = K_I\xi_* \quad (30)$$

Aplicando las referencias $\dot{q}_{d1}, \dot{q}_{d2}, \dots, \dot{q}_{dn}$ produce las señales en estado estacionario $\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}$, respectivamente. Entonces, se obtienen las siguientes n ecuaciones

$$\beta\dot{q}_{di} + \mu\text{sign}(\dot{q}_{di}) - \tau_c = K_I\xi_{i*} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

Las expresiones en (31) pueden escribirse como

$$\Phi\theta = Q, \quad \theta = [\beta, \mu, \tau_c]^T \quad (32)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} & \text{sign}(\dot{q}_{d1}) & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{q}_{dn} & \text{sign}(\dot{q}_{dn}) & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} K_I\xi_{1*} \\ \vdots \\ K_I\xi_{n*} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Cuando el número de ecuaciones n es igual al número de columnas de Φ y Φ^{-1} existe, la expresión (32) se puede resolver mediante $\hat{\theta} = \Phi^{-1}Q$. Cuando $n > 3$, se puede utilizar el método de Mínimos Cuadrados (Strang, 1988), el cual proporciona la siguiente solución

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TQ \quad (34)$$

Esta solución supone que $(\Phi^T\Phi)^{-1}$ existe. Nótese que esta matriz no existe cuando las referencias \dot{q}_{di} , $i = 1, 2, \dots, n$ en (31) son todas positivas o todas son negativas debido a que la segunda y tercera columnas de Φ serían linealmente dependientes. Para garantizar la existencia de dicha matriz se deben de utilizar referencias \dot{q}_{di} con magnitudes diferentes, algunas con valor positivo y otras con valor negativo.

IV-B. Segundo paso de la identificación: estimación de J

Los estimados $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\tau}_c$ obtenidos en el primer paso permiten calcular el estimado \hat{J} del parámetro J . Supóngase que ahora la señal \dot{q}_d es una rampa, es decir, $\dot{q}_d = mt$ y $\ddot{q}_d = m$, donde m es la pendiente de la rampa. Con esta señal \dot{q}_d el término v en (15) está dado por

$$v = m + amt + c\text{sign}(\dot{q}) - d \quad (35)$$

La transformada de Laplace de (35) corresponde a

$$V(s) = \frac{am}{s^2} + \frac{m + c\text{sign}(\dot{q}) - d}{s} \quad (36)$$

Sustituyendo (27) y (36) en la expresión de $X(s)$ dada por (24) y tomando $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ resulta en

$$\lim_{s \rightarrow 0} s[\mathcal{L}[\xi], \mathcal{L}[\dot{\xi}], \mathcal{L}[\dot{q}]]^T = [\infty, \rho, \rho]^T, \quad \rho = \frac{am}{bK_I} \quad (37)$$

De acuerdo con el teorema del valor final los valores en estado estacionario $\dot{\xi}_*$ y \dot{q}_* de $\dot{\xi}$ y \dot{q} son

$$[\dot{\xi}_*, \dot{q}_*] = [\rho, \rho] \quad (38)$$

Como el estado estacionario $\dot{\xi}_*$ de $\dot{\xi}$ es la constante ρ , la señal ξ converge exponencialmente a la siguiente rampa ξ_*

$$\xi_* = \rho t + \delta \quad (39)$$

donde δ es la ordenada al origen de ξ_* . Entonces, la ecuación (14) converge exponencialmente a la siguiente expresión:

$$0 = m + amt - \rho(a + bK_P) - bK_I\xi_* + c\text{sign}(m) - d \quad (40)$$

Multiplicando esta última expresión por J y sustituyendo ρ y ξ_* dados respectivamente en (37) y (39) produce

$$0 = mJ + \beta mt - \frac{\beta m(\beta + K_P)}{K_I} - K_I\delta + \mu\text{sign}(m) - \tau_c \quad (41)$$

Al despejar J se obtiene

$$J = \frac{\beta(\beta + K_P)}{K_I} + \frac{K_I\delta - \mu\text{sign}(m) + \tau_c}{m} \quad (42)$$

El siguiente estimado \hat{J} de J puede obtenerse al sustituir en (42) los parámetros estimados $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_c$ y $\hat{\delta}$ por β , μ , τ_c y δ .

$$\hat{J} = \frac{\hat{\beta}(\hat{\beta} + K_P)}{K_I} + \frac{K_I\hat{\delta} - \hat{\mu}\text{sign}(m) + \hat{\tau}_c}{m} \quad (43)$$

donde $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\tau}_c$ son obtenidos mediante (34). El estimado $\hat{\delta}$ utilizado en (43) se obtiene tomando muestras de ξ_* en t_1, t_2, \dots, t_l instantes de tiempo, y posteriormente ajustando el conjunto de datos $[\xi_*(t_i), (t_i)]$, $i = 1, 2, \dots, l$ de la línea recta en (39) mediante el método de Mínimos Cuadrados.

V. VALIDACIÓN DEL MODELO

La validación del modelo identificado se realiza mediante la siguiente ley de control para el seguimiento de una trayectoria

$$\tau = \left[\hat{J}\ddot{r} + \hat{\beta}\dot{r} + \hat{\mu}\text{sign}(\dot{r}) - \hat{\tau}_c + \lambda\dot{\zeta} \right] \quad (44)$$

El controlador propuesto (44) se muestra en la Fig. 3 y su objetivo es que la velocidad del servomecanismo \dot{q} sea igual a la trayectoria deseada \dot{r} . La señal ϑ en la Fig. 3 representa un estimado de \dot{q} , $\dot{\zeta}$ en (44) se considera un estimado del error de seguimiento $\dot{e} = \dot{r} - \dot{q}$ y λ es una constante positiva. La derivada en el tiempo de ζ satisface

$$\ddot{\zeta} = -\gamma[\dot{\zeta} - \dot{e}] \quad (45)$$

donde γ es una constante positiva. La variable $\ddot{\zeta}$ se obtiene siguiendo el mismo procedimiento con el que resulta $\ddot{\xi}$ en (12).

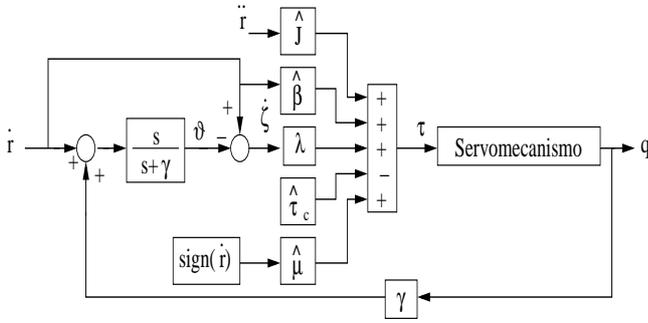


Figura 3. Sistema de control para el seguimiento de una trayectoria.

V-A. Análisis de estabilidad del sistema de control

Sustituyendo la ley de control (44) en el modelo del servomecanismo (1) produce

$$J\ddot{q}(t) + \beta\dot{q}(t) + \mu\text{sign}(\dot{q}) = \tau_c + \hat{J}\ddot{r} + \hat{\beta}\dot{r} + \hat{\mu}\text{sign}(\dot{r}) - \hat{\tau}_c + \lambda\dot{\zeta} \quad (46)$$

Sumando y restando los términos $J\ddot{r}$ y $\beta\dot{r}$ en la ecuación anterior se obtiene

$$J\ddot{e}(t) + \beta\dot{e}(t) + \lambda\dot{\zeta} = \kappa \quad (47)$$

$$\kappa = -\tilde{J}\ddot{r} - \tilde{\beta}\dot{r} + \tilde{\tau}_c - \hat{\mu}\text{sign}(\dot{r}) + \mu\text{sign}(\dot{q}) \quad (48)$$

$$\tilde{J} = \hat{J} - J, \quad \tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta, \quad \tilde{\tau}_c = \hat{\tau}_c - \tau_c \quad (49)$$

La expresión (47) es equivalente a

$$\ddot{e}(t) = -\frac{\beta}{J}\dot{e}(t) - \frac{\lambda}{J}\dot{\zeta} + \frac{\kappa}{J} \quad (50)$$

La ecuación anterior junto con (45) forman la siguiente representación en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma \\ -\frac{\lambda}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \kappa \quad (51)$$

La ecuación característica $g(s)$ del sistema (51) está dada por

$$g(s) = s^2 + \left(\gamma + \frac{\beta}{J} \right) s + \frac{\lambda\gamma}{J} = 0 \quad (52)$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz a $g(s)$ resulta que el sistema (51) es estable si todos los coeficientes de $g(s)$ son positivos.

V-B. Medida de la calidad del modelo

Supóngase que \dot{r} no cambia de signo, que el motor gira en una sola dirección y el sentido del giro es tal que $\text{sign}(\dot{q}) = \text{sign}(\dot{r})$. Defínase $\tilde{\mu} = \hat{\mu} - \mu$, entonces κ en (48) puede ser reescrito como $\kappa = \tilde{\Theta}\chi^T$, donde

$$\tilde{\Theta} = [\tilde{J}, \tilde{\beta}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}_c], \quad \chi = [-\ddot{r}, -\dot{r}, -\text{sign}(\dot{r}), 1] \quad (53)$$

Si $\tilde{\Theta}$ es igual a cero, lo cual significa que los parámetros estimados son iguales a los verdaderos, entonces $\dot{\zeta}$ y \dot{e} tienen una convergencia exponencial a cero. Para medir la cercanía a cero del vector $\tilde{\Theta}$ se muestrea la señal $\dot{\zeta}$ p veces y el valor de cada muestra $\dot{\zeta}_i$ de $\dot{\zeta}$ se utiliza para calcular el error medio cuadrático

$$E = \sum_{i=1}^p \dot{\zeta}_i^2 \quad (54)$$

VI. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El prototipo de laboratorio consiste de un servomotor de la marca Moog, modelo C34-L80-W40 y es energizado por un amplificador Copley Controls, modelo 423, configurado en modo corriente. La posición del motor se mide por medio de un decodificador óptico con 2500 pulsos por revolución. Los algoritmos de identificación son implementados usando MatLab/Simulink operando bajo el programa Wincon de Quanser Consulting. La adquisición de datos se lleva a cabo a través de una tarjeta Q8 también de Quanser Consulting. La ganancia K del amplificador dada en (1) es de 1.344; las ganancias del controlador PI definido en (4) son $K_P = 1.344$ y $K_I = 6.72$, y el parámetro α en (21) es 50. El período de muestreo es de 1ms, y las ecuaciones diferenciales dadas en (8) y (21) se resuelven utilizando el método de integración de Euler. Para estimar $\theta = [\beta, \mu, \tau_c]^T$ se utilizan 8 velocidades de referencia \dot{q}_d , las cuales permiten obtener las siguientes matrices Φ y Q definidas en (33)

$$\Phi = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & -1 \\ 15 & 1 & -1 \\ 20 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & -1 \\ -10 & -1 & -1 \\ -15 & -1 & -1 \\ -20 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.0320 \\ 0.0376 \\ 0.0433 \\ 0.0482 \\ -0.0527 \\ -0.0582 \\ -0.0621 \\ -0.0669 \end{bmatrix} \quad (K_I \xi^*)$$

Al sustituir las matrices Φ y Q en (34) se obtiene

$$\hat{\theta} = [\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\tau}_c]^T = \left[0.001 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rev}}, 0.0375 \text{ N} \cdot \text{m}, 0.0098 \text{ N} \cdot \text{m} \right]^T \quad (55)$$

Una referencia \dot{q}_d con forma de rampa y con pendiente $m = 5$ se utiliza para estimar el momento de inercia J .

La señal ξ obtenida al aplicar esta señal de referencia \dot{q}_d se observa en la Fig 4, y converge a una línea recta con ordenada al origen δ en aproximadamente 3s. Un estimado $\hat{\delta}=10.8\text{e-}3$ de δ se calcula mediante el método de Mínimos Cuadrados y se obtiene ajustando el conjunto de muestras $[\xi(t_i), t_i], i = 1, 2, \dots, 7, t_1 = 3, t_7 = 6$ y $[t_{i+1}-t_i] = 0.5$. La pendiente m , el estimado $\hat{\delta}$, los estimados en (55) y las ganancias K_P y K_I se sustituyen en (43) para obtener $\hat{J}=0.00914 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Los estimados $\hat{\theta} = [\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\tau}_c]^T$ y \hat{J} así como la ganancia $\lambda=0.0472$ son utilizados en la ley de control (44); además, el parámetro γ en (45) tiene un valor de 19.9. La Fig 5 (a) muestra la trayectoria \dot{r} usada para la validación del modelo, y la Fig 5 (b) presenta el estimado $\dot{\zeta}$ del error \dot{e} del seguimiento de trayectoria. La Tabla I muestra los parámetros estimados y el error medio cuadrático E el cual es calculado para $p=2000$; las muestras de $\dot{\zeta}$ se adquirieron en el intervalo de tiempo 5-25s. Además, la Tabla I presenta los parámetros nominales del servomecanismo obtenidos usando la hoja de datos del servomotor (Moog, 2012) y la del amplificador de potencia (Copley, 2012). Los parámetros asociados a la fricción de Coulomb y a la perturbación constante no están disponibles en la hoja de datos del servomotor. La Tabla I también presenta los valores de E obtenidos cuando $\hat{\tau}_c$ o $\hat{\mu}$ se consideran cero en la ley de control (44). El valor más pequeño de E se obtiene cuando todos los estimados $\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\tau}_c$ y \hat{J} son utilizados en (44).

VII. CONCLUSIONES

Este artículo propuso un método simple que estima la inercia, las fricciones viscosa y de Coulomb y una perturbación constante del modelo de un servomecanismo de CD controlado en velocidad. El control de velocidad se llevó a cabo reemplazando la velocidad del servo por un filtrado de la posición del motor y de la velocidad de referencia deseada. Los resultados experimentales indican que la inercia estimada por el método propuesto es muy cercana a la inercia nominal del servomecanismo.

VIII. AGRADECIMIENTOS

Antonio Concha agradece a CONACYT por la beca que ha recibido durante sus estudios de Postgrado. Los autores también agradecen a Gerardo Castro y a Jesús Meza por la puesta a punto del prototipo de laboratorio.

REFERENCIAS

- Andoh, F. (2007). Moment of inertia identification using the time average of the product of torque reference input and motor position. *IEEE Transactions on Power Electronics* **22**(6), 2534-2542.
- Awaya, I., Y. Kato, I. Miyake y M. Ito (1992). New motion control with inertia identification function using disturbance observer. En: *Proceedings on the 1992 IECON International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation*, San Diego, CA, USA.
- Basilio, J. C. (2002). A laboratory for a first course in control systems. *International Journal of Electrical Engineering Education* **39**(1), 54-70.
- Basilio, J. C. Y M. V. Moreira (2004). State-Space Parameter Identification in a Second Control Laboratory. *IEEE Transactions on Education* **47**(2), 204-210.

- Copley Controls (2012). www.copleycontrols.com/motion/pdf/412ce.pdf.
- Dorf, R. D. Y R. H. Bishop (1988). *Modern Control Systems*. 8th edn, Addison-Wesley.
- Jaritz, A. Y M. Spong (1996). An experimental comparison of robust control algorithms on a direct drive manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(6), 627-640.
- Kelly, R. (2000). A measurement procedure for viscous and coulomb friction. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **49**(4), 857-861.
- Kobayashi, S., I. Awaya, H. Kuromaru y K. Oshitani (1995). Dynamic model based auto-tuning digital servo driver. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **42**(5), 462-466.
- Kwon, T., S. Sul, H. Nakamura y K. Tsuruta (2006). Identification of the Mechanical Parameters for Servo Drive. En: *IEEE Industrial Applications Conference*, Tampa, Florida, USA.
- Kuo, B. C. (1982). *Automatic Control Systems*. 4th edn, Prentice Hall.
- Lee, K. B., J. Y. Yoo, J. H. Song y I. Choy (2004). Improvement of low speed operation of electric machine with an inertia identification using ROELO. *IEE Proceedings on Electric Power Applications* **151**(1), 116-120.
- Moog Components (2012). www.polysci.com/docs/moc23series.PDF.
- Moreno, J. Y R. Kelly (2002). On motor velocity control by using only position measurements: two case studies. *International Journal of Electrical Engineering Education* **39**(2), 118-127.
- Strang, G. (1988). *Linear Algebra and Its Applications*. International Thomson Publishing
- Yang, S., y Y. Deng (2005). Observer-based inertial identification for autotuning servo motor drives. En: *IEEE Industrial Applications Conference*, Hong Kong, China.

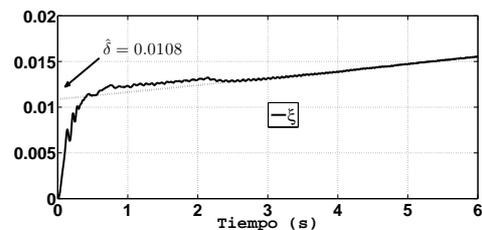


Figura 4. Señal $K_I \xi$ obtenida cuando se aplica $\dot{q}_d = 5t$ rev/s.

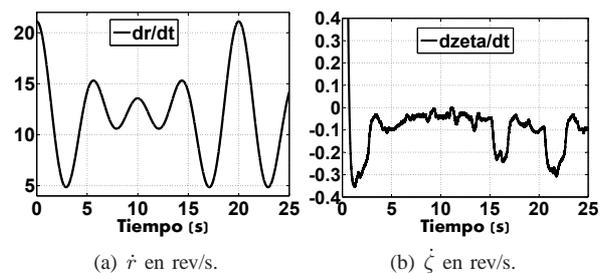


Figura 5. Trayectoria \dot{r} y estimado $\dot{\zeta}$ del error de seguimiento.

TABLA I
PARÁMETROS ESTIMADOS.

| | $\hat{\beta}$ | $\hat{\mu}$ | $\hat{\tau}_c$ | \hat{J} | E |
|----------------------|---------------|-------------|----------------|-----------|----------|
| Parámetros nominales | 0.001784 | — | — | 0.0093113 | — |
| Método propuesto | 0.001 | 0.0377 | 0.0098 | 0.00914 | 16.53 |
| — | 0.001 | 0.0377 | 0 | 0.00914 | 43.77 |
| — | 0.001 | 0 | 0.0098 | 0.00914 | 100.5482 |